L'utilizzo dei differenziali e degli integrali in fisica

Prof. Sergio Cortese

Rev. 22/09/2015

All'interno della analisi matematica, uno degli strumenti fondamentali è il differenziale di una funzione, la cui definizione, è giustamente presentata in modo formale. In particolare data la funzione $y = f(x)$, il differenziale dy calcolato in un punto è normalmente definito come

$$dy = f'(x_0)dx$$

dove $f'(x)$ è nota come la *derivata* della funzione $f(x)$ e spesso dx è definito dalla relazione

$$dx = \Delta x$$

ovvero il differenziale di y è pari alla *derivata* della funzione ($f'(x_0)$) per il differenziale di x, il quale a sua volta è definito come un incremento arbitrario e finito di x. Per la definizione e i metodi espliciti di calcolo di $f'(x_0)$ si rimanda al corso di matematica in quanto non è questo ciò che ci interessa approfondire. Quello che qui sottolineiamo è che il differenziale in un punto è definito come un valore numerico ($f'(x_0)$) per un incremento arbitrario della variabile indipendente.

L'osservazione centrale è che, anche quando si abbia ben chiaro il significato di *derivata*, spesso non si riesce né a dare un significato empirico al differenziale, né a comprenderne i possibili utilizzi. Se il differenziale dx è veramente uguale all'incremento Δx per quale motivo non continuare semplicemente ad utilizzare Δx? Anche la motivazione per cui le due quantità dovrebbero essere uguali appare piuttosto artificiale. Quello che vogliamo quindi proporre è un approccio al differenziale dal punto di vista della *fisica*. Tale approccio necessariamente non ha il rigore specifico della matematica, ma consente la creazione di una idea di differenziale che nei fatti funziona, dando allo stesso tempo una prima giustificazione del suo utilizzo all'interno del calcolo infinitesimale e del calcolo integrale.

Iniziamo quindi dal problema fisico di definire la velocità di un corpo in un moto rettilineo osservando che la definizione di velocità media valutata su di un intervallo di tempo finito non pone particolari difficoltà, infatti:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

I problemi nascono invece quando intendiamo definire la velocità istantanea del corpo stesso poiché l'idea sarebbe quella di utilizzare la medesima definizione ponendo $\Delta t = 0$. Da notare che agli inizi del calcolo infinitesimale, prima che venissero formalizzati i concetti di *limite* e *derivata*, era proprio questo il procedimento utilizzato, ovvero data la legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

si ha che

$$s(t + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2}at^2 + at\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

da cui

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2}{\Delta t} = at + \frac{1}{2}a\Delta t$$

infine, ponendo $\Delta t = 0$ otteniamo la nota legge della velocità nel moto uniformemente accelerato

$$v = at.$$

Tale procedimento, che nei fatti ci restituisce il risultato atteso, risulta però viziato dal peccato originale di aver diviso per Δt quindi, dato che non è ammessa la divisione per 0, dall'impossibilità di considerare formalmente attendibile il risultato ottenuto.

Risulta quindi necessario sviluppare una struttura formale che consenta di dare un significato al rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ anche nel caso limite di $\Delta t = 0$. La risposta più appropriata in questo caso è proprio l'utilizzo dell'operazione di *limite*, ovvero di utilizzare per la velocità la definizione:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

tuttavia è possibile utilizzare un approccio completamente diverso, che utilizza il concetto di differenziale. Per sviluppare questo concetto partiamo proprio dalla definizione velocità come *limite*: per definizione stessa di *limite*, scegliendo opportunamente Δt è sempre possibile fare in modo che

$$\left| v - \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| < \varepsilon$$

dove ε è una quantità arbitraria positiva, in genere scelta molto piccola.

Dal punto di vista della matematica è piuttosto importante che sia $\varepsilon \neq 0$ ma se ci poniamo nell'ottica della fisica, in cui le piccole quantità assumono un significato solo se è possibile apprezzarne il valore in un procedimento di misura, possiamo affermare che se Δt è sufficientemente piccolo, ovvero infinitesimo, allora

$$\left| v - \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| \approx 0$$

Se indichiamo con dt l'incremento infinitesimo tale per cui la relazione approssimata diventa una relazione esatta possiamo arrivare a scrivere che

$$v = \frac{ds}{dt}$$

dove ds e dt corrispondono proprio ai *differenziali*.

Se ci riagganciamo alla definizione matematica di differenziale (e ricordiamo che nel diagramma spazio-tempo t corrisponde all'asse x) possiamo vedere che la fondamentale differenza è che mentre nella definizione matematica si parla di incremento arbitrario, da un punto di vista fisico si parla esplicitamente di *incremento infinitesimo*.

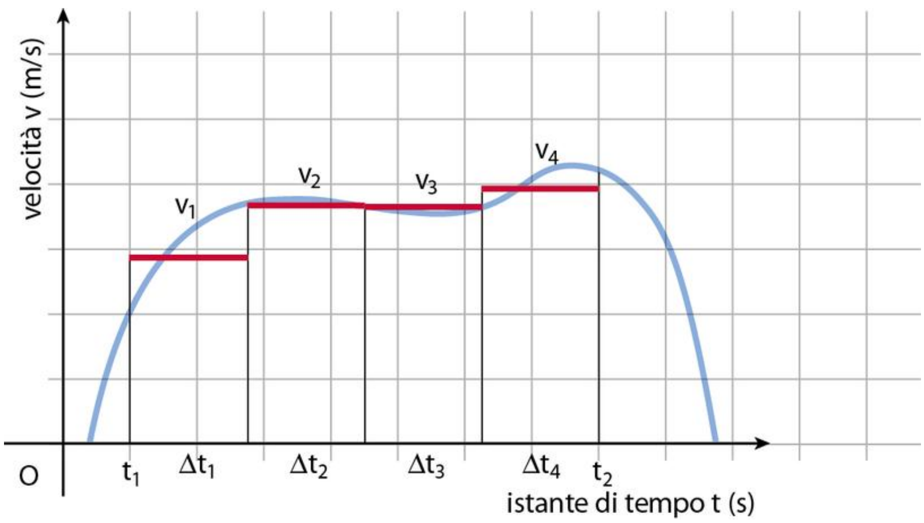
In una visione più orientata al calcolo, lontana dal necessario rigore matematico, possiamo in un certo senso affermare che il problema della impossibilità di imporre $\Delta t = 0$ nella definizione di velocità istantanea viene risolto sostituendo agli incrementi finiti Δs e Δt i rispettivi incrementi infinitesimi ds e dt, di modo che l'errore commesso nella sostituzione sia trascurabile. Questo concetto può essere reso ancora più chiaro se riprendiamo il caso del moto uniformemente accelerato utilizzando questa volta i differenziali al posto degli incrementi finiti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{at \cdot dt + \frac{1}{2}a \cdot dt^2}{dt} = at + \frac{1}{2}a \cdot dt = at$$

Dove non si è posto $dt = 0$ ma si è utilizzato il fatto che, essendo dt infinitesimo, può essere trascurato rispetto a t.

La visione empirica del differenziale come incremento infinitesimo può risultare utile anche nel percorso inverso che, a partire dalla conoscenza della velocità, cerca di ricostruire la legge oraria del moto.

Partiamo dal sottostante grafico velocità-tempo e osserviamo che se dividiamo l'intervallo globale di tempo in sottointervalli e approssimiamo la velocità con un valore costante in ogni tratto



allora possiamo stimare lo spazio percorso come la sommatoria dei singoli spostamenti e scrivere:

$$\Delta s \approx \sum \Delta s_i = \sum v_i \Delta t_i$$

Se il risultato non è sufficientemente accurato, e necessitiamo di una stima più precisa, possiamo aumentare a piacimento il numero di intervalli riducendo la dimensione di Δt_i, così come ad esempio nella seguente figura

fino ad arrivare al punto in cui l'errore commesso sarà di fatto trascurabile. Ancora una volta in maniera molto poco rigorosa, possiamo immaginare che se ogni Δt_i diventa un intervallo infinitesimo, ovvero un dt allora la corrispondente somma restituirà proprio il valore cercato, dal momento che per ogni piccolo elemento di spostamento il singolo errore commesso sarà assolutamente trascurabile. In tal caso la sommatoria viene indicata *somma integrale* o più semplicemente *integrale* e si indica con la seguente notazione:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

Sottolineiamo il fatto che un approccio rigoroso al calcolo differenziale e integrale è possibile solo all'interno della matematica, in un quadro ben preciso di rigore formale, e che la visione semplificata qui presentata, corrispondente a un approccio più orientato alla fisica, è sostanzialmente equivalente solo nel caso di funzioni sufficientemente regolari. In ogni caso, quando si utilizza in fisica il simbolo di *integrale*, quasi sempre possiamo considerarlo come il risultato della somma di un gran numero di contributi, al limite di infiniti contributi, ciascuno di valore infinitesimo.

Poiché inoltre ogni singolo contributo può essere interpretato come l'area di un rettangolino sottostante la curva, all'integrale (di una funzione positiva) possiamo associare il significato geometrico di area della regione di piano sottostante la curva stessa. Naturalmente questo tipo di interpretazione geometrica non fornisce alcuna indicazione operativa su come eseguire il calcolo di un *integrale*, argomento per il quale si rimanda di nuovo al corso di matematica.